

**ПРИМЕНЕНИЕ АППАРАТА ЕСТЕСТВЕННЫХ  
ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ АНАЛИЗА  
КРУПНОМАСШТАБНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ  
ПРОЦЕССОВ В СРЕДНЕЙ АТМОСФЕРЕ**

*Е. В. Ракушина, К. К. Кандиева,  
О. Г. Анискина, А. И. Погорельцев*

Российский государственный гидрометеорологический университет  
192007 Санкт-Петербург, Воронежская улица, 79  
E-mail: zhenya\_rakushina@mail.ru

Поступила в редакцию 2.12.2018  
Поступила после доработки 20.12.2018

**Введение**

В геофизических исследованиях часто возникает необходимость аппроксимации полей для выявления основных закономерностей, удаления шумов или изменения размерности анализируемых массивов. В процессе анализа полей решаются задачи объективного контроля результатов наблюдений и ассимиляции, осуществляется физико-статистическое моделирование, сглаживание и фильтрация данных наблюдений и моделирования.

В настоящее время в качестве базисных функций используются различные степенные полиномы, тригонометрические и сферические функции, полиномы Чебышева, Лагранжа, Эрмита и т. п.

Степенные полиномы второй и третьей степеней неплохо аппроксимируют поля метеорологических величин в небольших областях, поэтому широко используются в методе конечных элементов, который сегодня все чаще используется при гидродинамическом моделировании атмосферных процессов. В глобальном гидродинамическом моделировании атмосферных процессов широко используют сферические функции (Репинская,

Бабич, 1999). Разложение по тригонометрическим функциям и вейвлет-анализ позволяет изучать особенности волновых мод различных пространственно-временных масштабов.

У всех упомянутых выше функций, используемых в качестве базисных, есть один недостаток — они фиксированы, формальны и напрямую не описывают особенности полей метеорологических величин и процессы, их формирующие.

Для уменьшения влияния искусственности, возникающей при использовании классических ортогональных многочленов, и лучшего анализа пространственно-временной структуры, начиная с 50-х годов XX в., применяют статистически оптимальные разложения, в которых в качестве базисных используют естественные (или эмпирические) ортогональные функции — ЕОФ. Главная особенность такой аппроксимации состоит в том, что при фиксированном числе членов ряда норма ошибки, рассчитанная по ансамблю реализаций случайных полей, минимальна, т. е. обеспечивается минимальная остаточная дисперсия по сравнению с любым формальным ортонормированным базисом.

Теоретические основы метода эмпирических ортогональных составляющих были заложены Э. Н. Лоренцом (Лоренц, 1977). Н. А. Багров разработал более компактный способ определения естественных ортогональных составляющих, основанный на применении теории матриц (Багров, 1958; 1959; 1960). А. М. Обухов отмечал, что использование ЕОФ может оказаться полезным для решения широкого круга геофизических задач, связанных с выявлением типичных процессов и с количественной оценкой их интенсивности (Обухов, 1960). Одна из лучших отечественных монографий, посвященных ЕОФ, — это работа сотрудников ГГО под руководством М. И. Юдина, которая вышла в свет в 1968 году. Сегодня интерес к разложению по ЕОФ возник снова, и об этом свидетельствуют многочисленные исследования, в которых применяется аппарат ЕОФ, способный значительно уменьшить размерность анализируемых полей. Современная точка зрения на методы разложения по ЕОФ подробно представлена в статье Н. М. Доценко и др. (2011).

С точки зрения статистики разложение корреляционной матрицы совокупности полей представляет собой разложение по наиболее часто встречающимся собственным элементам, которые обладают большими собственными числами (Репинская, Бабич, 1999). Поэтому процесс разложения совокупности полей можно трактовать как процесс последовательного определения наиболее часто встречающихся пространственных структур анализируемых полей, а также определения их весов в исследуемой совокупности.

### Описание аппарата ЕОФ

Аналитическое представление метеорологических полей с использованием ЕОФ предполагает, что анализируемая величина задается временным рядом значений в дискретных точках пространства.

Рассмотрим функцию, которая зависит и от времени, и от пространства. Зависимость от пространства выражается в том, что переменные заданы в определенных ( $m$ ) точках пространства (всего  $M$  точек), например в пунктах наблюдений или в узлах модельной сетки. Данные привязаны к конкретным дискретным моментам времени  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_N$ . Следовательно, функцию  $f_m(t_i)$  можно представить в виде ряда:

$$f_m(t_i) = \sum_{k=1}^M Y_{km} Q_k(t_i), \quad (1)$$

где  $Y_{km}$  — заранее неизвестная функция, которая не зависит от времени (эта функция является базисной и называется естественной ортогональной функцией (ЕОФ));  $Q_k(t_i)$  — коэффициенты разложения по ЕОФ, зависящие от времени.

Количество базисных функций не может превышать количества точек, в которых задана функция  $f_m(t_i)$ .

Количество членов разложения в (1) может быть меньше  $M$  и тогда получим усеченный ряд, который содержит не всю информацию о раскладываемой функции. Можно оценить ошибку усечения  $\varepsilon_m^K(t_i)$ :

$$f_m(t_i) = \sum_{k=1}^K Y_{km} Q_k(t_i) + \varepsilon_m^K(t_i) \quad (2)$$

Именно на основе (2) определяют базисные функции  $Y_{km}$  и коэффициенты разложения  $Q_k(t_i)$ . При этом для выбранного количества членов разложения (рассматриваемых гармоник)  $K$  суммарный квадрат ошибки ( $r_m^K$ ) должен быть минимальным:

$$R^K = \sum_{m=1}^M (r_m^K)^2 \quad (3)$$

Лоренц еще в 1956 году доказал, что ошибка  $R^k$  будет минимальна, если выбрать ортогональные базисные функции  $Y_{km}$

$$\sum_{m=1}^M Y_{km} Y_{jm} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = j \\ 0, & \text{если } k \neq j \end{cases} \equiv \delta_{kj} \quad (4)$$

а амплитуды ЕОФ будут ортогональны во времени

$$\overline{Q_k^* Q_j^*} = a_k \delta_{kj},$$

$$a_k \geq a_{k+1} \geq 0. \quad (5)$$

Черта сверху означает осреднение по времени, а знак \* — отклонение от среднего значения.

Вследствие выполнения свойств ортогональности во времени и в пространстве ЕОФ оптимальным образом представляют раскладываемые в ряд данные.

Сегодня разложение по ЕОФ очень часто используется для выявления структуры полей метеорологических величин. В данной работе приведены результаты исследований двух тропических колебаний — квазидвухлетнего колебания (КДК) и осцилляции Маддена—Джулиана с использованием ЕОФ анализа. Поскольку в современной русской и англоязычной литературе отсутствует единообразная терминология для обозначения характеристик ЕОФ-анализа, то сразу определим термины, используемые в данной статье. Собственным вектором будем называть базис, по которому раскладывается функция. Главной  $k$ -й компонентой будет называться проекция поля аномалий на  $k$ -й собственный вектор.

### **Исследование сигнала КДК в поле зонального ветра**

Известно, что КДК влияет на глобальную атмосферную циркуляцию в тропосфере и стратосфере. КДК модулирует планетарные волны, тем самым оказывая влияние на циркуляцию средних широт, воздействует на процессы генерации и общую циркуляцию озона и других примесей в атмосфере, а также взаимодействует с таким важным для системы океан—атмосфера явлением как Эль-Ниньо / Южное Колебание (ЭНЮК).

КДК проявляется в чередовании ветровых режимов, которые зарождаются в тропической стратосфере и постепенно распространяются вниз от верхней стратосферы до тропопаузы со скоростью около 1 км в месяц. Требуется около 28 месяцев для совершения полного цикла колебания.

Существуют две фазы КДК: западная (экваториальное зональное движение воздуха с запада на восток) и восточная (с востока на запад). Нерегулярный вертикальный «спуск» аномалий относится к восточной фазе в большей степени, чем к западной. Амплитуда восточной фазы КДК примерно в два раза выше амплитуды западной фазы.

Число исследований, посвященных различным аспектам КДК (изучение структуры, механизма формирования, связи с атмосферной циркуляцией, тропическим циклогенезом и т. д.), непрерывно растет. Однако изучение самого КДК и сегодня остается актуальным. По-прежнему остается неясным, по данным какого изобарического уровня можно судить о фазе КДК. Этот уровень варьируется от 10 до 50 гПа (Scaife et al., 2014). Выбор уровня обосновывается значительными вариациями амплитуды ветра от фазы к фазе. Неопределенность в выборе уровня сказывается на результатах исследований. В стандартном подходе определения фазы КДК не учитывается временная эволюция на протяжении одной фазы, то есть не учитывается степень распространения аномалий зонального ветра в нижние слои атмосферы и влияние этих аномалий на атмосферные процессы.

В данном исследовании рассматривается возможность с использованием аппарата ЕОФ изучить вертикальную эволюцию фаз КДК, оценить значимость данных о ветре на каждом вертикальном уровне для выбора оптимального индикатора КДК, а также более точно классифицировать фазы КДК для изучения его влияния на процессы в атмосфере.

В исследовании использовались данные ре-анализа JRA-55 (Kobayashi et al., 2015). Аномалии зонального ветра в период 1958—2014 гг. предварительно сглаживались с использованием скользящего среднего за пять месяцев. Данные представлены на девяти изобарических уровнях (70, 50, 30, 20, 10, 7, 5, 3 и 1 гПа), на каждом из которых поля зонального ветра были разложены в ряды по ЕОФ и проанализированы две первые главные компоненты (ГК1 и ГК2), которые представлены на рис. 1. Первая ЕОФ описывает 52,7 % дисперсии, вторая — 41,7 %, что в сумме составляет 94,4 %. Аппарат ЕОФ позволил уменьшить размерность данных практически без потерь информации, и по первым двум коэффициентам разложения (КР1 и КР2) можно судить об изменении амплитуды и фазы КДК:

$$\text{Амплитуда} = \left[ \sqrt{\text{КР1}^2 + \text{КР2}^2} \right], \text{ Фаза} = \left[ \tan^{-1} \left( \frac{\text{КР2}}{\text{КР1}} \right) \right].$$

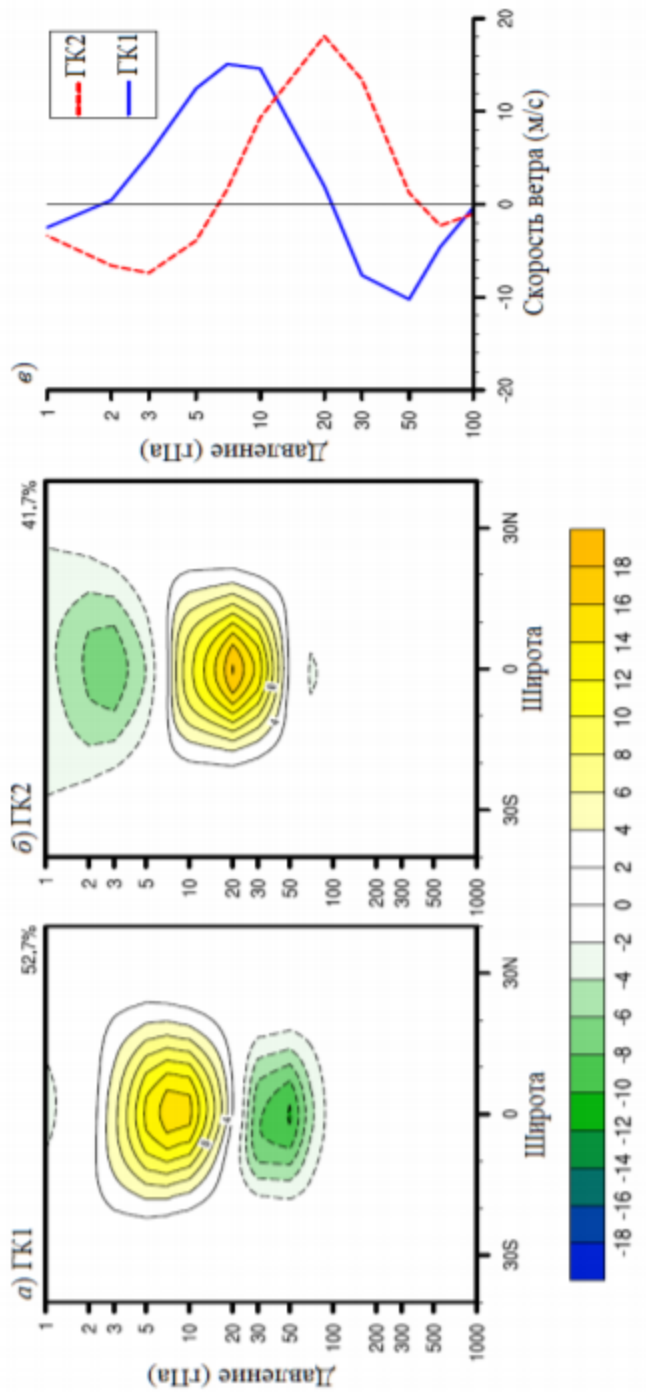


Рис. 1. Высотно-широтные разрезы в поле зонального ветра ГК1 (а) и ГК2 (б).  
 Вертикальные профили ГК1 и ГК2 на широте экватора (в).

Анализ ГК1 (рис. 1а и синяя линия на рис. 1в) показал наличие отрицательной корреляции между флуктуациями зонального ветра на поверхностях 7 и 50 гПа. Отрицательная корреляция на 3 и 20 гПа наблюдается и для ГК2 (рис. 1б и красная пунктирная линия на рис. 1в). Точки с резким изменением ГК1 на 7 и 50 гПа совпадают с моментами изменения направления ветра по ГК2. Амплитуда на 7 гПа выше амплитуды на 50 гПа. Исходя из полученных результатов, можно предположить, что уровень 7 гПа является определяющим для выбора фазы КДК. На этом уровне ГК1 выступает в роли основной моды, а ГК2 — знакопеременной.

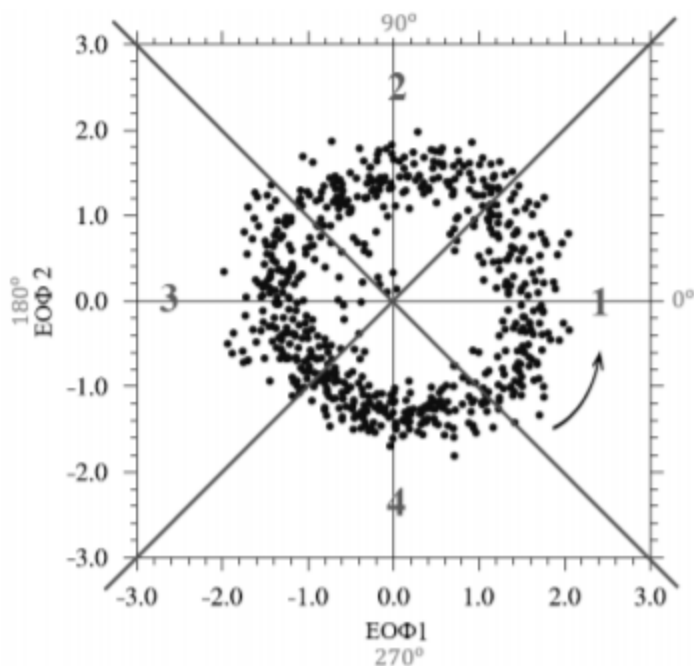


Рис. 2. Диаграмма рассеяния первых двух коэффициентов разложения по ЕОФ зонального ветра. Стрелка показывает направление перемещения точек во времени.

Вертикальная эволюция КДК может быть исследована с помощью первых двух коэффициентов разложения, представленных в двумерном пространстве. На рис. 2 по абсциссе отложены значения



первого коэффициента разложения, по ординате — второго коэффициента разложения.

Точка показывает значения первых двух коэффициентов разложения в каждый момент времени полного цикла КДК, за время которого точка совершает почти полный оборот в двумерном пространстве. Разделив это пространство на 4 части, можно выделить четыре состояния или типа КДК.

На рис. 3 приведены широтно-высотные разрезы аномалий зонального ветра для четырех типов КДК в период 1958—2014 гг.

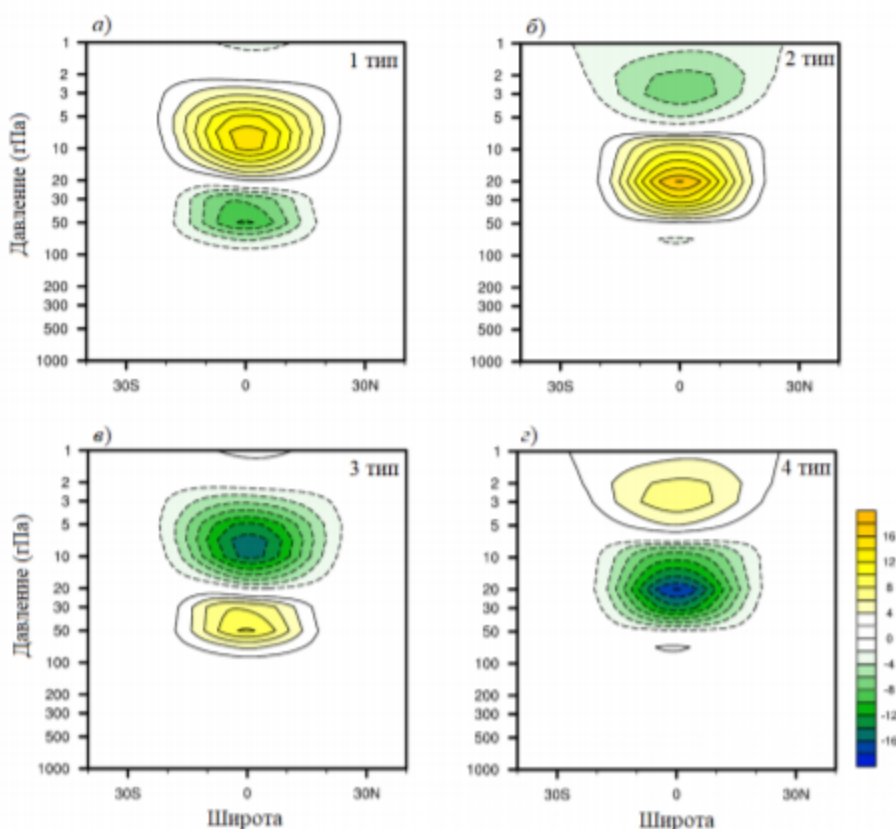


Рис. 3. Вертикальные разрезы среднего зонального ветра (м/с), соответствующие фазам КДК.

Если, например, рассматривать аномалии среднего зонального ветра относительно изобарической поверхности, на которой наблюдаются максимальные амплитуды 20 гПа, то можно выявить четыре типа КДК: для первого типа (рис. 3а) выбранная изобарическая поверхность 20 гПа выступает в роли границы между областями западного и восточного переноса; для второго типа (рис. 3б) на 20 гПа наблюдается максимум западного переноса; для третьего типа (рис. 3в) изобарическая поверхность 20 гПа — это граница между областями восточного и западного переноса; для четвертого типа (рис. 3г) на 20 гПа наблюдается максимум восточного переноса.

Из анализа разрезов видно распространение флуктуаций зонального ветра по вертикали, связанное с четырьмя фазами КДК. Виден процесс эволюции КДК — «спуск» максимальной флуктуации зонального ветра из стратосферы в тропосферу.

Для более детального анализа четырех типов КДК были получены значения индекса КДК (сумма значений зонального ветра на широте экватора на высоте 20 км) для трех месяцев — январь, февраль, март во временном интервале с 1958 по 2014 гг. Диаграмма зависимости индекса КДК для 1-го типа показана на рис. 4. Анализ показал, что во время 1-го типа наблюдаются различные стандартные фазы КДК (западная и восточная). Чаще всего западная, однако к 1-му типу можно отнести 1966, 1975 и 2006 годы, в которые наблюдалась сильная восточная фаза (значения индекса КДК по модулю больше 300 м/с). Можно отметить, что часто индекс КДК совпадает для февраля и марта, редко для января и марта, за весь рассматриваемый период только дважды значения индекса совпали для всех трех месяцев. Первый тип КДК можно назвать переходным, при котором направление потока меняется с восточного на западное.

Для всех годов, отнесенных ко 2-му типу, наблюдается стандартная западная фаза. Только в 1960 и 2013 гг. ветер имел восточное направление, но был слабее, чем в остальные годы. Таким образом, 2-й тип можно полностью отнести к западной фазе КДК.

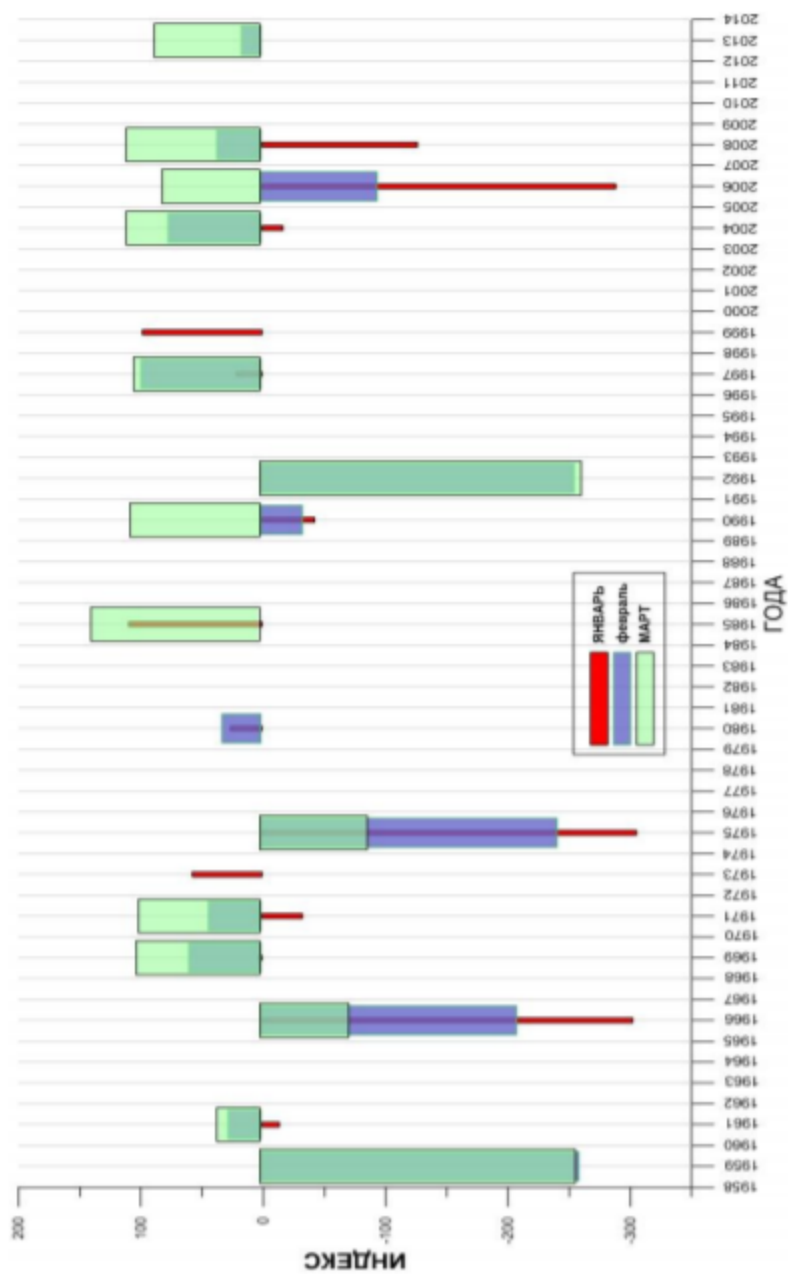


Рис. 4. Распределение КДК первого типа.

3-й тип можно отнести к переходному — с западного на восточный. Часто совпадают значения индексов двух последовательных месяцев, не только февраля и марта, как в случае первого типа, но и января и февраля. Вышесказанное позволяет говорить об инерционности процессов, наблюдаемых при этом типе КДК.

4-й тип относится к восточной фазе, во все три исследуемых месяца индексы КДК имели почти одинаковые по величине значения.

Анализ повторяемости четырех типов показал, что за весь рассматриваемый период во все месяцы преобладал 3-й тип КДК, то есть переходный от западного переноса к восточному. В таблице 1 приведены данные о повторяемости типов КДК в разные месяцы.

*Таблица 1*

**Повторяемость фазы КДК в зимние месяцы**

Месяц	Тип КДК			
	1-й	2-й	3-й	4-й
Январь	13	11	16	13
Февраль	14	13	17	11
Март	14	12	16	14

Анализ связи КДК и полей метеорологических величин выявил, что значимые отличия при разных фазах КДК наблюдаются в полях температуры и зонального ветра. Максимальные отличия наблюдаются в летний период в тропической зоне и в полярной области на высотах более 20 км. Влияние КДК имеет ярко выраженный профиль по вертикали в полях температуры и зонального ветра. Наиболее отличаются поля метеорологических величин при 2-м и 4-м типах, и это обоснованно, так как именно эти типы КДК соответствуют западной и восточной фазам.

**Исследование сигнала ОМД**

Осцилляция Маддена—Джулиана (ОМД) — это крупномасштабное колебание метеорологических характеристик в тропической

области, которое проявляется в возникновении кучевой облачности и ее перемещении в восточном направлении вдоль экватора со средней скоростью около 5 м/с и периодом от 30 до 60 суток. Развитие крупномасштабной конвективной ячейки ОМД начинается на западе Индийского океана, затем зона глубокой конвекции перемещается на восток, постепенно затухая по мере продвижения к восточной части Тихого океана.

Для характеристики ОМД широко используется индекс ОМД, предложенный в работе (Wheeler, Hendon, 2004) и использующий аппарат ЕОФ, так как первые два коэффициента разложения по ЕОФ описывают поведение ОМД. Коэффициенты разложения вычисляются по осредненным по тропической области данным о скорости зонального ветра в верхней и нижней тропосфере (200 гПа и 850 гПа) и данным об уходящей длинноволновой радиации (УДР), которые проецируются на ЕОФ. ЕОФ вычисляются для ковариационной матрицы, сформированной из ежедневных значений полей скорости ветра и УДР (всего 8401 дней в период с 1979 по 2001 гг.). Вычисленные таким образом два первых коэффициента разложения (КР1, КР2) определяют ежедневную амплитуду и фазу ОМД (мощность и положение облачности).

Данные амплитуды и фазы ОМД, с 1979 года по настоящее время, полученные с помощью описанного метода (Wheeler, Hendon, 2004), хранятся на сайте Центра климатических прогнозов NOAA. Однако существуют архивы данных с более длинными временными рядами наблюдений, применение которых позволит повысить статистические показатели результатов исследования. Одним из таких архивов данных является ре-анализ JRA-55, который и был использован в данном исследовании для вычисления амплитуды и фазы ОМД за период с 1958 по 2016 гг. На рис. 5 представлены ЕОФ1 и ЕОФ2 (два первых собственных вектора), полученные по методике (Wheeler, Hendon, 2004) для периода с 1959 по 1988 гг.

Две первые ЕОФ описывают не более 20 % дисперсии. Невысокое значение дисперсии можно объяснить тем, что в расчетах использованы данные о трех метеорологических величинах для всех

времен года и учтены процессы с различными пространственно-временными масштабами.

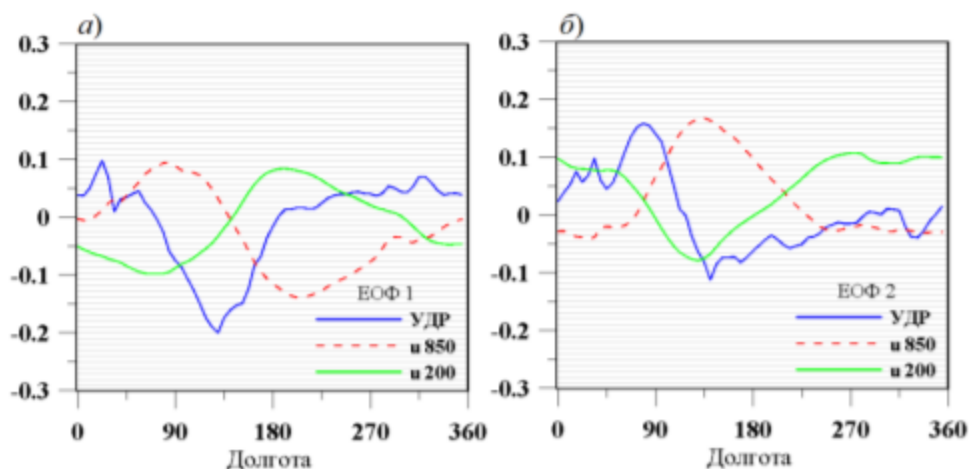


Рис. 5. Долготное распределение первых двух ЕОФ в поле УДР ( $\text{Вт/м}^2$ ) (синяя линия), зонального ветра на 850 гПа (м/с) (красная пунктирная линия), зонального ветра на 200 гПа (м/с) (зеленая линия).  
*a* — ЕОФ1, *б* — ЕОФ2.

ЕОФ1 описывает структуру ОМД, когда развитая кучевая облачность расположена над Индонезией и западной частью Тихого океана. Для ЕОФ2 облачность располагается над Тихим океаном. Ветровая структура ЕОФ1 схожа со структурой ЕОФ2: направление зонального ветра на уровнях 850 гПа противоположно его ходу на уровне 200 гПа.

Рис. 6 демонстрирует кривую средних значений амплитуды индекса за январь—февраль с 1958 по 2016 гг. по данным ре-анализа JRA-55 и кривую распределения средних значений амплитуды оригинального индекса ОМД по данным ре-анализа NCEP/NCAR с 1979 по 2016 гг. Полагают, что ОМД с амплитудой индекса ОМД меньше 1 — слабая осциляция, если амплитуда индекса ОМД больше 1 — сильная осциляция.

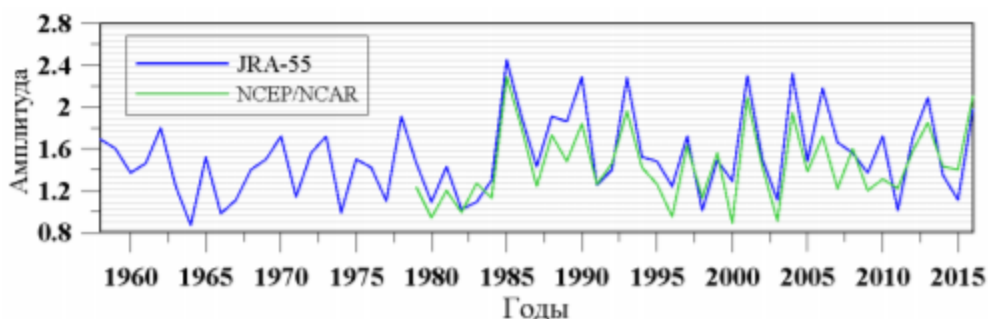


Рис. 6. Изменение средних значений амплитуды индекса ОМД за январь—февраль в период с 1958 по 2016 гг.

Анализ результатов, приведенных на рис. 6, показал, что в большинстве случаев средняя амплитуда ОМД больше 1 и позволил сделать вывод о развитии сильных осцилляций в зимнее время. Значение средней максимальной амплитуды события ОМД по данным JRA-55 с 1958 по 1980 гг. не превышает 1,75, а с 1980—2016 гг. наблюдаются более сильные осцилляции со средними значениями амплитуды больше 2.

Осцилляции Маддена—Джулиана может быть представлена в двумерном фазовом пространстве, координатами которого являются первые два коэффициента разложения, как и в случае с КДК (рис. 2). На основе этого в работе (Wheeler, Hendon, 2004) цикл ОМД разделен на 8 фаз. Время перехода между каждой фазой составляет 6 дней, но может меняться от события к событию. Схематически распространение аномалий УДР, связанных с ОМД, представлено на рис. 7, из которого следует, что облачность ОМД возникает над Африкой/западной частью Индийского океана (отрицательные значения УДР, 1-я фаза), аномалии распространяются вдоль экватора в восточном направлении (2—7 фаза), цикл ОМД завершается в восточной части Тихого океана одновременно с диссипацией облачности (8-я фаза). На картах, соответствующих 1-ой и 8-ой фазам, одновременно видны две области отрицательных аномалий УДР это области возникновения и рассеивания облачности ОМД.

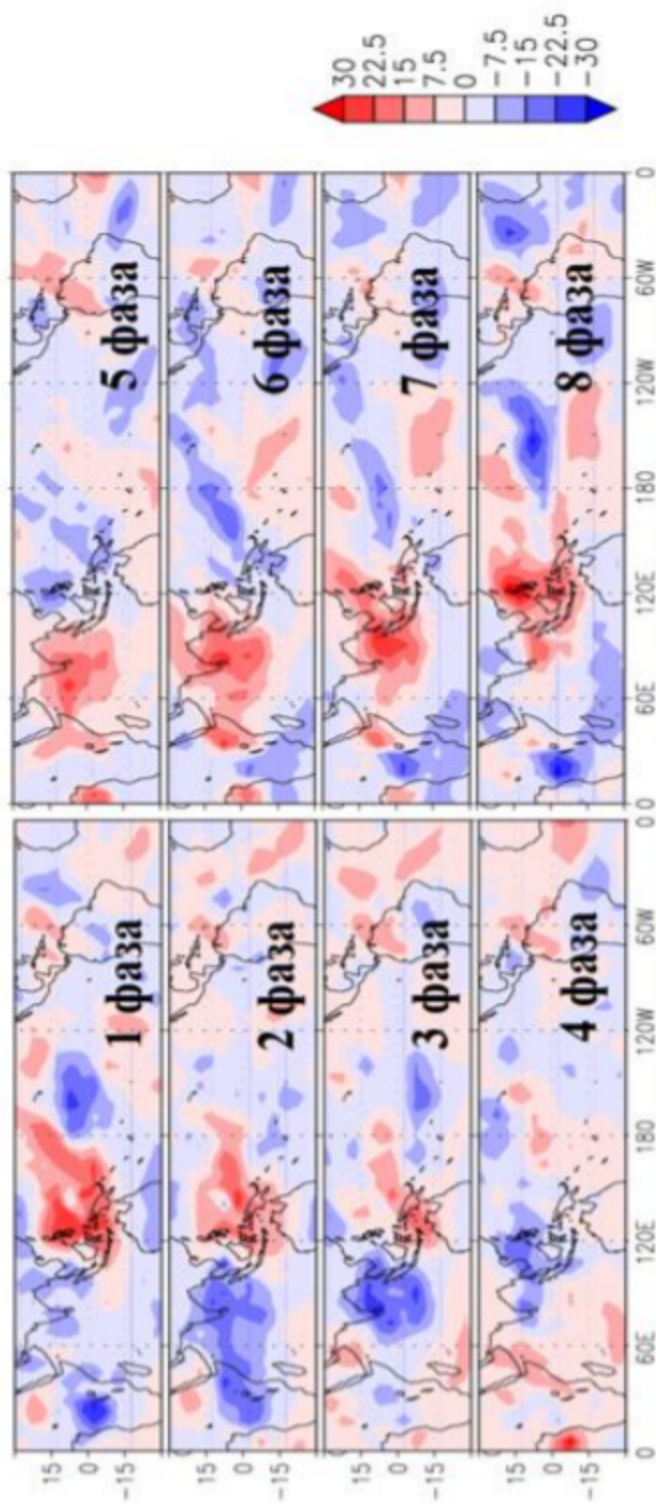


Рис. 7. Пространственное распределение аномалий УДР ( $\text{Вт/м}^2$ ) для фаз ОМД, наблюдаемых в январе—феврале, по данным JRA-55 для периода 1958—1988 гг.



На рис. 7 видно, как облачность ОМД возникает над Африкой / западной частью Индийского океана (отрицательные значения УДР, 1-я фаза), аномалии распространяются вдоль экватора в восточном направлении (2—7 фазы), цикл ОМД завершается в восточной части Тихого океана одновременно с диссипацией облачности (8-я фаза). На картах, соответствующих 1-й и 8-й фазам, одновременно видны две области отрицательных аномалий УДР — это области возникновения и рассеивания облачности ОМД.

Полученная эволюционная схема ОМД позволяет выдвинуть ряд гипотез влияния ОМД на атмосферные процессы, в том числе и на стратосферный полярный вихрь. Согласно работе Кандиевой и др. (2018), развитие аномалий геопотенциала в полярной области зависит от положения облачности, связанного с ОМД. Различное положение облачности ОМД по-разному влияет на динамику стратосферы, например, аномалии, генерируемые ОМД, в северной части Тихого и в западной части Индийского океанов способны воздействовать на стационарную ложбину в Тихом океане и тем самым контролировать мощность стратосферного полярного вихря (Garfinkel et al., 2014). ОМД оказывает влияние на вид внезапных стратосферных потеплений: разделению полярного вихря предшествует более сильное событие ОМД, чем при смещении вихря (Liu et al., 2014). Более того было показано, что более половины случаев ВСП возникают, когда аномалии, связанные с ОМД, расположены в Тихом океане.

### **Заключение**

В данной работе с помощью аппарата ЕОФ исследована эволюция и получены количественные оценки двух атмосферных процессов — КДК и ОМД.

Результаты работы показали, что структура естественных ортогональных функций не несет очевидной информации о вкладе КДК и ОМД в поля основных метеорологических величин. Влияние этих двух колебаний можно оценить, анализируя временной ход коэффициентов разложения по ЕОФ.

Дополнительно оценка коэффициентов разложения позволяет определить и амплитуду атмосферных процессов в конкретный момент времени. Важно понимать, что ЕОФ не всегда представляет собой существующие динамические колебания или колебания, имеющие физическую природу. Чаще всего, физический процесс скрывается в нескольких ЕОФ.

Исследование сигнала КДК в поле зонального ветра с помощью аппарата ЕОФ показало, что определение фазы КДК можно проводить на уровне 200 гПа, тогда вертикальное распространение аномалий зонального ветра выглядит следующим образом: 1) переходная фаза от восточной к западной; 2) западная фаза; 3) переходная фаза от западной к восточной; 4) восточная фаза.

Следовательно, аппарат ЕОФ позволил определить межфазовые переходы, которые указывают на вертикальную эволюцию фазы КДК и, возможно, применение подобного анализа фаз КДК позволит получить новые оценки влияния КДК на динамику атмосферы.

Исследование сигнала ОМД показало, что аппарат ЕОФ можно использовать для анализа набора метеорологических полей. Первые две ЕОФ позволили исследовать развитие ОМД вдоль экваториального пояса и установить, что чаще всего развитие нового события ОМД наблюдается сразу после завершения предыдущего цикла ОМД. Анализ амплитуды ОМД показал, что в зимнее время наблюдаются сильные осцилляции Маддена—Джулиана. Полученные оценки могут использоваться для исследования влияния ОМД на атмосферные процессы.

*Исследование сигнала КДК выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках проекта № 18-05-01050, влияние ОМД рассмотрено в рамках государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 5.6493.2017/8.9).*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Багров Н. А. (1958). Аналитическое представление полей // Труды ЦИП. Вып. 64. С. 3—25.

*Багров Н. А.* (1959). Аналитическое представление последовательности метеорологических полей посредством естественных ортогональных составляющих // Труды ЦИП. Вып. 74. С. 3—24.

*Багров Н. А.* (1960). Разложение метеорологических полей по естественным ортогональным составляющим // Труды ЦИП. Вып. 106. С. 133—138.

*Доценко Н. М., Иващенко Н. Н., Сонечкин Д. М.* (2011). Свойства естественных ортогональных составляющих температурных полей Северной Евразии в XX веке // Известия РАН. ФАО. Т. 47. Вып. 1. С. 35—47.

*Кандиева К. К., Аникина О. Г., Погорельцев А. И.* (2018). Влияние осцилляции Маддена—Джулиана на интенсивность и структуру полярного вихря // Ученые записки РГТМУ. Вып. 50. С. 18—27.

*Лоренц Э.* (1977). Физические основы теории климата и его моделирования. Предсказуемость климата. — Л.: Гидрометеониздат. С. 137—141.

*Обухов А. М.* (1960). О статистически ортогональных разложениях эмпирических функций // Известия АН СССР. Серия геофизическая. Вып. 3. С. 432—439.

*Репинская Р. П., Бабич Я. Б.* (1999). Аппроксимация рядами эмпирических ортогональных функций северополушарных полей облачности по спутниковым данным // Исслед. Земли из космоса. Вып. 6. С. 8—15.

*Юдин М. И.* (1968). Физико-статистический метод долгосрочных прогнозов погоды. — Л.: Гидрометеониздат. 28 с.

*Garfinkel C. I., Benedict J. J., Maloney E. D.* (2014). Impact of the MJO on the boreal winter extratropical circulation // Geophys. Res. Lett. V. 41. P. 6055—6062. DOI: 10.1002/2014GL061094.

*Kobayashi S., Harada Y., Ota Y. et al.* (2015). The JRA-55 reanalysis: General specifications and basic characteristics // J. Meteor. Soc. Japan. V. 93. P. 5—48.

*Liu C., Tian B., Ki K.-F., Manney G. L., Livesey N. J., Yung Y. L., Waliser D. E.* (2014). Northern Hemisphere mid-winter vortex-displacement and vortex-split stratospheric sudden warmings: Influence of the Madden—Julian Oscillation and Quasi—Biennial Oscillation // J. Geophys. Res. Atmos. V. 119. P. 12599—12620. DOI: 10.1002/2014JD021876.

*Lorenz E. N.* (1956). Empirical orthogonal functions and statistical weather prediction. Sci. Rep. № 1. Statistical Forecasting Project. M.I.T. Cambridge, Massachusetts. 48 p.

*Scaife A. A., Athanassiadou M., Andrews M., Arribas A., Baldwin M., Dunstone N., Knight J., Maclachlan C., Manzini E., Müller W. A.* (2014). Predictability of the quasi-biennial oscillation and its northern winter teleconnection on seasonal to decadal timescales // Geophys. Res. Lett. V. 41. № 5. P. 1752—1758.

*Wheeler M., Hendon H. H.* (2004). An all season real time multivariate MJO index: Development of an index for monitoring and prediction // Mon. Weather Rev. V. 132. P. 1917—1932.